

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

I CAMMINI DI DYCK

Tesi di Laurea in Teoria dei Numeri

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
Marilena Barnabei

Presentata da:
Giulia Zaccarelli

Sessione Unica
Anno Accademico 2015-2016

Introduzione

In questa tesi è stata studiata una particolare classe di oggetti combinatori: i cammini di Dyck.

Verrà definito il polinomio di enumerazione di un cammino e poi la sua funzione generatrice, che sarà utile a studiare i cammini attraverso diverse tipologie di parametri, per contare quanti saranno i cammini di una certa lunghezza e con un determinato valore di parametro.

Si introdurrà infine anche l'equidistribuzione, per studiare parametri con caratteristiche simili.

Indice

Introduzione	2
1 Definizioni	7
2 Decomposizione	10
2.1 n -cammini di Dyck	11
3 Enumerazione	15
4 Tipi di parametri	17
4.1 Parametri additivi	17
4.2 Parametri quasi additivi	18
4.3 Parametri sinistri	18
5 Enumerazione con vari parametri	20
5.1 Numero di picchi	20
5.2 Numero di picchi bassi e picchi alti	23
5.2.1 Numero di picchi bassi	24
5.2.2 Numero di picchi alti	26
5.3 Numero di picchi e numero di passi di ritorno	26
5.3.1 Numero di passi di ritorno	27
5.4 Numero di picchi e altezza del primo picco	27
5.4.1 Altezza del primo picco	28
5.5 Numero di valli basse e valli alte	28
5.5.1 Numero di valli basse	29
5.5.2 Numero di valli alte	30
5.6 Numero di picchi prima e dopo il primo passo di ritorno	30
5.7 Numero di discese di ritorno di lunghezza dispari e pari	31
5.7.1 Numero di discese di ritorno di lunghezza dispari	32
5.7.2 Numero di discese di ritorno di lunghezza pari	32
5.8 Numero di duu e ddu	33

5.8.1	Numero di <i>duu</i>	34
6	Equidistribuzione	35
	Bibliografia	38

Elenco delle figure

1.1	Un cammino di Dyck	7
1.2	Il cammino <i>uduudddud</i>	8
1.3	Elevazione del cammino <i>uduudddud</i>	9
2.1	Decomposizione del primo ritorno di <i>uduudddud</i>	10
2.2	Scomposizione di <i>uduudddud</i> in cammini irriducibili	11
2.3	I due cammini di semilunghezza 2	11
2.4	I cinque cammini di semilunghezza 3	11
5.1	Un 5-cammino con 3 doppie salite e 2 picchi	22
5.2	Un cammino con 3 valli e 4 picchi	23

Capitolo 1

Definizioni

Un *cammino di Dyck* di *semilunghezza* n è un cammino nel primo quadrante del piano cartesiano che ha come punto iniziale l'origine degli assi e come punto finale il punto dell'asse x di coordinate $(2n, 0)$, costruito da segmenti di due tipi: segmenti di estremi $(a, b), (a + 1, b + 1)$ (passi in su, indicati con la lettera u) e segmenti di estremi $(a, b), (a + 1, b - 1)$ (passi in giù, indicati con la lettera d).

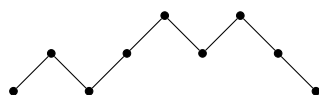


Figura 1.1: Un cammino di Dyck

Si possono definire le *parole di Dyck*: esse sono stringhe formate dalle lettere u e d , con il numero di u uguale al numero di d , quindi, se la parola è lunga $2n$, sia il numero di u che il numero di d sarà uguale ad n . Esse sono tali che, se prese le sottoparole costituite dalle prime i lettere della parola, con $i = 1, \dots, 2n$, esse dovranno sempre possedere un numero di u maggiore o uguale al numero di d . Le parole di Dyck sono naturalmente in corrispondenza biunivoca con i cammini di Dyck: la lettera u rappresenta le salite e la d le discese; la condizione sulle sottoparole corrisponde alla caratteristica dei cammini di Dyck di non scendere mai sotto il livello dell'asse x . Ad esempio, il cammino di Dyck nella figura corrisponde alla parola di Dyck $uduududd$.

Un passo del cammino con estremi di ordinate $k - 1$ e k , con $k \geq 1$, si dice essere a *livello* k . Allo stesso modo, se un punto ha ordinata k allora si

dice a *livello* k .

Un *picco* è dato dalla sequenza dei due passi ud , una *valle* da du , una *doppia salita* da uu . Il *livello* di un picco o una valle è il livello del punto di incontro dei suoi due passi.

Un *passo di ritorno* è un passo d che parte dal livello 1. Cammini con un solo passo di ritorno sono chiamati *primitivi* (o sopraelevati).

Una *ascesa*/*discesa* è una stringa massimale composta soltanto da u / da d , e la sua lunghezza è data dal numero di passi che la costituiscono.

Una *discesa di ritorno* è una discesa che termina con un passo di ritorno.

ϵ rappresenta il cammino vuoto, cioè un punto.

Ad esempio, la parola di Dyck $uuduuddud$ rappresenta un cammino di Dyck che possiede tre picchi, due valli, due passi di ritorno, due doppie salite:

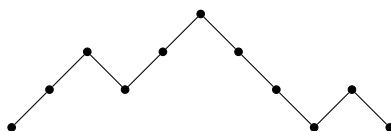
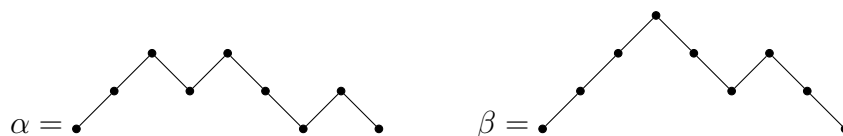


Figura 1.2: Il cammino $uuduuddud$

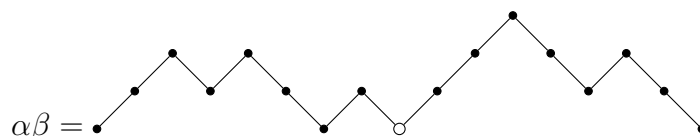
Se α e β sono cammini di Dyck, si possono definire: $\alpha\beta$, cioè la *concatenazione* di α e β , e $\hat{\alpha} = u\alpha d$, cioè l'*elevazione* di α .

Si può notare che, preso un cammino α di semilunghezza n , a seguito dell'elevazione, $\hat{\alpha}$ sarà di semilunghezza $n + 1$, in quanto sono stati aggiunti due passi al cammino, cioè u e d .

Se si considerano i cammini:



la loro concatenazione sarà:



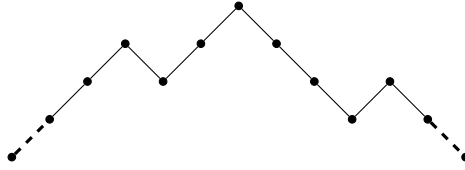


Figura 1.3: Elevazione del cammino $uuduuddud$

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono insiemi di cammini di Dyck finiti, si possono allo stesso modo definire la *concatenazione* di \mathbf{A} e \mathbf{B} , cioè

$$\mathbf{AB} = \{\alpha\beta : \alpha \in \mathbf{A}, \beta \in \mathbf{B}\}$$

e l'*elevazione* di \mathbf{A} , cioè

$$\hat{\mathbf{A}} = \{\hat{\alpha} : \alpha \in \mathbf{A}\}.$$

Ovviamente, $\mathbf{A}\{\epsilon\} = \{\epsilon\}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Capitolo 2

Decomposizione

Qualsiasi cammino di Dyck $\alpha \neq \epsilon$ ha una decomposizione unica di questo tipo:

$$\alpha = u\beta_1 d\gamma_1 = \hat{\beta}_1 \gamma_1, \quad (2.1)$$

con β_1 e γ_1 che possono essere anche vuoti.

Questa viene detta *decomposizione del primo ritorno*, in quanto il passo d presente in essa è proprio il primo passo di ritorno del cammino.

Ad esempio, si può provare a scomporre il cammino di un esempio fatto precedentemente, rappresentato dalla parola di Dyck $\alpha = uduuddddud$: esso si decompone in $u\beta_1 d\gamma_1$, con $\beta_1 = uduudd$ e $\gamma_1 = ud$.

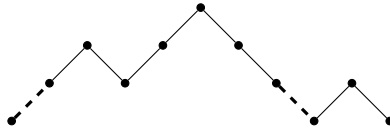


Figura 2.1: Decomposizione del primo ritorno di $uduuddddud$

Invece, se per esempio si prende $\alpha = uudd$, si decomporrà in $u\beta_1 d\gamma_1$, con $\beta_1 = ud$ e $\gamma_1 = \epsilon$.

In quest ultimo caso, il cammino è detto *irriducibile* o *elevato*, che significa che possiede un unico passo di ritorno: quello finale. Si può sempre scomporre un cammino non irriducibile in cammini irriducibili.

Una maniera alternativa (anch'essa unica) di scrivere la decomposizione è la seguente:

$$\alpha = \beta_2 u \gamma_2 d = \beta_2 \hat{\gamma}_2, \quad (2.2)$$

con β_2 e γ_2 che possono essere anche vuoti.

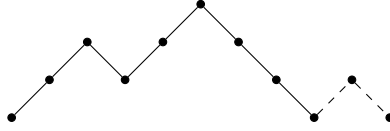


Figura 2.2: Scomposizione di $uduudddud$ in cammini irriducibili

2.1 n -cammini di Dyck

Si indica con \mathbf{D}_n l'insieme di tutti i cammini di Dyck di semilunghezza n .

$$\mathbf{D}_0 = \{\epsilon\}.$$

Ad esempio, per $n = 2$:

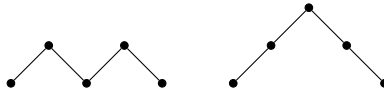


Figura 2.3: I due cammini di semilunghezza 2

Invece, per $n = 3$:

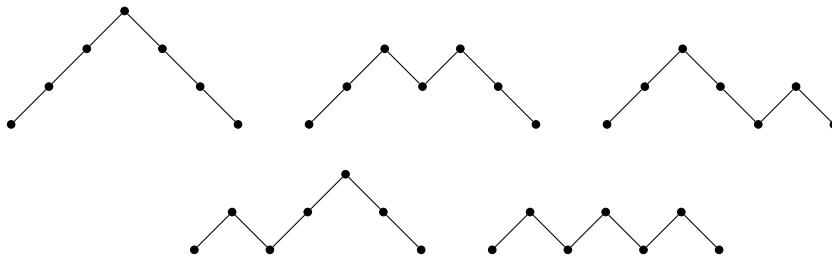


Figura 2.4: I cinque cammini di semilunghezza 3

Si indica con $\hat{\mathbf{D}}_n$ l'insieme di cammini ottenuti elevando tutti quelli di \mathbf{D}_n : avranno dunque semilunghezza $n + 1$, e varrà $|\mathbf{D}_i| = |\hat{\mathbf{D}}_i|$.

(2.1) e (2.2) hanno come conseguenze equivalenti:

$$\mathbf{D}_n = \hat{\mathbf{D}}_0 \mathbf{D}_{n-1} \cup \hat{\mathbf{D}}_1 \mathbf{D}_{n-2} \cup \dots \cup \hat{\mathbf{D}}_{n-2} \mathbf{D}_1 \cup \hat{\mathbf{D}}_{n-1} \mathbf{D}_0, \quad n \geq 1 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{D}}_{n-1} \cup \mathbf{D}_1 \hat{\mathbf{D}}_{n-2} \cup \dots \cup \mathbf{D}_{n-2} \hat{\mathbf{D}}_1 \cup \mathbf{D}_{n-1} \hat{\mathbf{D}}_0, \quad n \geq 1 \quad (2.4)$$

Qui le unioni sono disgiunte e $|\mathbf{D}_i| = |\hat{\mathbf{D}}_i|$, dunque:

$$|\mathbf{D}_n| = |\mathbf{D}_0||\mathbf{D}_{n-1}| + |\mathbf{D}_1||\mathbf{D}_{n-2}| + \dots + |\mathbf{D}_{n-1}||\mathbf{D}_0|. \quad (2.5)$$

Verrà affrontato di seguito l'argomento dei numeri di Catalan, strettamente connessi con il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n .

La funzione e i numeri di Catalan

Si definisce l'*n-esimo numero di Catalan* C_n come il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n , cioè $C_n = |\mathbf{D}_n| \quad \forall n \geq 0$. Dunque, per la (2.5), vale la formula ricorsiva:

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}. \quad (2.6)$$

La funzione generatrice per la successione dei numeri di Catalan è la seguente serie formale:

$$C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n,$$

ed è chiamata *funzione di Catalan*. La sua versione implicita si può scrivere in questo modo:

$$zC^2 - C + 1 = 0, \quad C(0) = 1. \quad (2.7)$$

Si può dimostrare l'equivalenza tra (2.7) e (2.6) sostituendo semplicemente in (2.7) l'espressione generica di una serie formale:

$$z(C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots)^2 - (C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots) + 1 = 0.$$

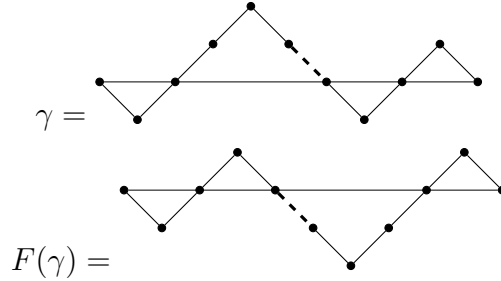
Si giunge così ad una identità di serie formali, da cui si può ricavare la formula ricorsiva (2.6). Il viceversa è analogo.

Di conseguenza, la versione esplicita della funzione di Catalan sarà:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}. \quad (2.8)$$

Si può inoltre ottenere una formula esplicita per l'*n-esimo numero di Catalan*. Si considerino tutti i possibili cammini di semilunghezza n , costituiti

da passi u e d , con punto di partenza l'origine e punto di arrivo $(2n, 0)$. Essi sono in totale $\binom{2n}{n}$, perchè per identificarne uno basta scegliere dove posizionare, per esempio, i passi u . Per un cammino di tale tipo, l'*eccedenza* è per definizione il numero di passi u che si trovano al di sopra dell'asse x . Naturalmente, i cammini di Dyck saranno quelli con eccedenza uguale ad n . Si può costruire una funzione F che associ a un cammino di eccedenza $i > 0$, un cammino di eccedenza $i - 1$. A tale scopo, si scompone un cammino nel modo seguente. Preso γ cammino qualsiasi, se ne segue il percorso finché esso non passa sopra l'asse x , e si continua poi fino al punto in cui tocca l'asse x . Si chiamerà D l'ultimo passo di questa porzione di cammino. γ si scomporrà dunque in $\alpha D \beta$. $F(\gamma)$ sarà, per definizione, $\beta D \alpha$.



Applicando F , la porzione di cammino β viene mantenuta alla stessa altezza, mentre α viene abbassata di una unità: cala quindi di uno l'eccedenza. Questa è dunque la F che si cercava, che è anche una biiezione. Di conseguenza, il numero di cammini di eccedenza n (i cammini di Dyck) è uguale al numero di cammini di eccedenza $n - 1$, che è uguale al numero di cammini di eccedenza $n - 2$ e così via, fino a 0. Dunque, partizionare i cammini in base all'eccedenza significa ottenere $n + 1$ insiemi con la stessa cardinalità. Per questo motivo, il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n sarà:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Tale scrittura equivale a:

$$C_n = \binom{2n}{n} \binom{2n}{n-1}.$$

Utilizzando la prima di queste ultime due formule, si può dimostrare facilmente un'altra formula ricorsiva:

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4.$$

Verrà riportato successivamente l'enunciato del teorema di inversione di Lagrange, allo scopo di trovare il coefficiente di z^n nello sviluppo di C^s .

Per la dimostrazione si veda ad esempio [4, Pagina 14].

Teorema di inversione di Lagrange.

Sia $H = H(\lambda)$ un polinomio in λ . Esiste una ed una sola serie formale $A = A(z)$ che soddisfi una equazione del tipo:

$$A(z) = 1 + zH(A(z)).$$

Inoltre, se $G = G(\lambda)$ è un altro polinomio in λ , allora vale:

$$[z^n]G(A(z)) = \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]G'(1 + \lambda)(H(1 + \lambda))^n, \quad n \geq 1,$$

dove la notazione $[z^n]G(A(z))$ sta ad indicare il coefficiente di z^n nello sviluppo di $G(A(z))$.

Applicando poi su (2.7) questo teorema, con $A(z) = C(z)$, $H(\lambda) = \lambda^2$, $G(\lambda) = \lambda^s$, si ottiene:

$$[z^n]C^s = \frac{s}{n}[\lambda^{n-1}](1 + \lambda)^{2n+s-1}.$$

Facendo uso della formula del binomio di Newton su $(1 + \lambda)^{2n+s-1}$, a seguito di qualche calcolo elementare si giunge alla formula:

$$[z^n]C^s = \frac{s}{2n + s} \binom{2n + s}{n}, \quad (n, s) \neq (0, 0). \quad (2.9)$$

Capitolo 3

Enumerazione

Un parametro p relativo ai cammini di Dyck è una funzione:

$$p : \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{D}_n \mapsto \mathbb{N}.$$

I parametri saranno utili a studiare i cammini in relazione alle loro caratteristiche. Alcuni esempi sono il numero di picchi o di valli, l'altezza del primo picco, il numero di passi di ritorno: ognuno di questi è infatti indicato da un numero non negativo.

Sia \mathbf{A} un insieme finito di cammini di Dyck, tutti della stessa semilunghezza. Si può definire il *polinomio di enumerazione* di \mathbf{A} relativo al parametro p :

$$P_{\mathbf{A}}(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} t^{p(\alpha)},$$

dove la variabile t fa da ‘segnaposto’ per il parametro p . Se \mathbf{A} e \mathbf{B} sono insiemi disgiunti di cammini, allora:

$$P_{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}(t) = P_{\mathbf{A}}(t) + P_{\mathbf{B}}(t).$$

Per semplicità si denoteranno:

$$P_n(t) = P_{\mathbf{D}_n}(t) \quad \hat{P}_n(t) = P_{\hat{\mathbf{D}}_n}(t).$$

Si può inoltre definire la *funzione generatrice* per l'enumerazione dei cammini di Dyck:

$$\Omega(t, z) = \sum_{n \geq 0} P_n(t) z^n,$$

dove z fa da ‘segnaposto’ per la semilunghezza n , e t fa lo stesso per il parametro p .

Questa definizione è molto utile perchè (adattando il parametro p alle proprie esigenze), se si considera il coefficiente di $t^i z^n$, esso rappresenterà il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n per i quali il parametro assume il valore i .

Un discorso analogo vale se si considerano più parametri.

Si può definire poi σ_n :

$$\sigma_n = \sum_{\alpha \in \mathbf{D}_n} p(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = P'_n(1).$$

Una immediata conseguenza è il fatto che la funzione generatrice di $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ è $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_{t=1}$.

Se si considera il caso particolare di $p(\alpha) = p \quad \forall \alpha \in \mathbf{D}_n$, allora varrà $\sigma_n = p|\mathbf{D}_n| = pC_n$, dunque $p = \frac{\sigma_n}{C_n}$.

Capitolo 4

Tipi di parametri

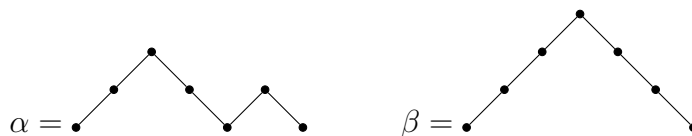
4.1 Parametri additivi

Un parametro p è detto *additivo* se vale:

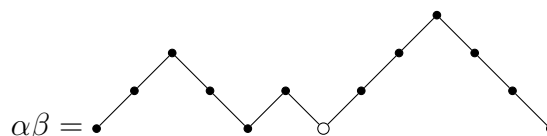
$$p(\alpha\beta) = p(\alpha) + p(\beta) \quad \forall \alpha, \beta \text{ cammini di Dyck.} \quad (4.1)$$

Alcuni esempi: il numero di picchi, il numero di doppie salite, il numero di passi di ritorno, il numero di sequenze *udd*.

Se si prendono i cammini:



la loro concatenazione sarà:



Se si considera il numero di passi di ritorno, questo è un parametro additivo perchè il punto di concatenazione è il punto di incontro di due passi dei quali il primo è passo di ritorno del primo cammino. Dunque la concatenazione non aggiunge passi di ritorno, ma semplicemente conserva quelli che già sono presenti nei due cammini. Infatti α ne possiede due, β uno, e $\alpha\beta$ tre.

(4.1) implica che, passando ai polinomi di enumerazione:

$$P_{\mathbf{AB}}(t) = P_{\mathbf{A}}(t)P_{\mathbf{B}}(t) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ insiemi finiti di cammini di Dyck.}$$

E di conseguenza, usando anche (2.4):

$$P_n(t) = P_{n-1}(t)\hat{P}_0(t) + P_{n-2}(t)\hat{P}_1(t) + \dots + P_1(t)\hat{P}_{n-2}(t) + P_0(t)\hat{P}_{n-1}(t).$$

Poi, passando alle funzioni generatrici:

$$\Omega - 1 = z\Omega\hat{\Omega}. \quad (4.2)$$

4.2 Parametri quasi additivi

p è detto *quasi additivo* se, $\forall \alpha, \beta$ cammini di Dyck, α contribuisce $p(\alpha)$ e β contribuisce $p(\beta)$ a $p(\alpha\beta)$, e

$$\exists \alpha, \beta : \quad p(\alpha\beta) > p(\alpha) + p(\beta).$$

Esempi: il numero di valli e il numero di *duu*.

Se si devono concatenare due cammini α e β , e si considera il numero di valli, rappresentate per definizione dalla coppia di passi *du*, questo è un parametro quasi additivo perchè, concatenando, vengono ovviamente conservate le valli di α e β , e se ne forma sempre una nuova in corrispondenza del punto di concatenazione, che è il punto centrale di una coppia *du*. Infatti, facendo riferimento alla figura precedente, α possiede una valle, β nessuna, e $\alpha\beta$ due.

4.3 Parametri sinistri

p è detto *parametro sinistro* se, $\forall \alpha, \beta$ cammini di Dyck, vale:

$$p(\alpha\beta) = \begin{cases} p(\alpha) & \text{se } \alpha \neq \epsilon \\ p(\beta) & \text{se } \alpha = \epsilon \end{cases} \quad (4.3)$$

Esempi: il livello del primo picco, il livello della prima valle, la lunghezza della prima discesa.

Se si devono concatenare due cammini α e β , e si considera il livello del primo picco, questo è un parametro sinistro perchè per identificare il primo picco si deve percorrere $\alpha\beta$ partendo da sinistra, quindi si parte da α . Se $\alpha = \epsilon$, esso non ha picchi dunque si procede controllando β , che avrà necessariamente almeno un picco: si dovrà dunque calcolare l'altezza del primo picco di β . Se invece $\alpha \neq \epsilon$, esso avrà necessariamente almeno un picco: si calcolerà dunque l'altezza del primo picco di α . Nella figura precedente, ad esempio, il livello del primo picco di $\alpha\beta$ è uguale al livello del primo picco di α , cioè 2.

Dunque, da (4.3):

$$P_{\mathbf{AB}}(t) = |\mathbf{B}|P_{\mathbf{A}}(t) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ insiemi finiti di cammini di Dyck, con } \epsilon \notin \mathbf{A}.$$

E di conseguenza, usando anche (2.4):

$$P_n(t) = C_{n-1}\hat{P}_0(t) + \dots + C_0\hat{P}_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

$$\Omega - 1 = zC(z)\hat{\Omega}. \tag{4.4}$$

Capitolo 5

Enumerazione con vari parametri

5.1 Numero di picchi

Esso è un parametro additivo.

Elevando resta invariato, tranne nel caso di ϵ che diventa ud :

$$\hat{P}_n = \begin{cases} t & \text{se } n = 0 \\ P_n & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega} = \Omega + t - 1.$$

Usando (4.2) e sostituendo, si può togliere la dipendenza da $\hat{\Omega}$:

$$z\Omega^2 - (1 + z - tz)\Omega + 1 = 0. \quad (5.1)$$

Verrà di seguito affrontato l'argomento dei numeri di Narayana, strettamente connessi con il parametro numero di picchi.

La funzione e i numeri di Narayana

Si definisce il *numero di Narayana* $\nu_{n,k}$ come il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n con $k + 1$ picchi. Cioè, se Ω è la funzione generatrice per il numero di picchi:

$$\nu_{n,k} = [t^{k+1}z^n]\Omega, \quad \text{e} \quad [t^0z^0]\Omega = 1. \quad (5.2)$$

La funzione generatrice per la successione dei numeri di Narayana è la seguente serie formale:

$$\rho(t, z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \nu_{n,k} t^k z^n,$$

ed è chiamata *funzione di Narayana*. Questo equivale a dire che:

$$\nu_{n,k} = [t^k z^n] \rho. \quad (5.3)$$

Dunque, per (5.2) e (5.3):

$$\begin{aligned} \nu_{n,k} = [t^k z^n] \rho &= [t^{k+1} z^n] \Omega, \quad \text{e } \Omega \text{ ha termine noto uguale ad } 1 \\ \Rightarrow \quad 1 + t\rho &= \Omega. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Mettendo a sistema questo risultato con l'equazione (5.1) soddisfatta dalla funzione generatrice del numero di picchi, si ottiene la versione implicita della funzione di Narayana:

$$(1 + \rho)(1 + t\rho)z = \rho, \quad \rho(t, 0) = 0. \quad (5.5)$$

Dunque la sua versione esplicita sarà:

$$\rho(t, z) = \frac{1 - z - tz - \sqrt{1 - 2z + z^2 - 2tz - 2tz^2 + t^2 z^2}}{2tz}. \quad (5.6)$$

Da qui si ricava:

$$\rho\left(\frac{1}{t}, tz\right) = t\rho(t, z). \quad (5.7)$$

Una immediata conseguenza di (2.8) e (5.6) fornisce una relazione tra funzione di Catalan e Narayana (con $t = 1$):

$$\rho(1, z) = C(z) - 1. \quad (5.8)$$

A questo punto si può utilizzare il teorema di inversione di Lagrange a partire da (5.5), ponendo:

$$A(z) = 1 + \rho = 1 + z(1 + \rho)(1 + t\rho),$$

$$H(\lambda) = \lambda((\lambda - 1)t + 1) \quad \text{e} \quad G(\lambda) = (\lambda - 1)^m,$$

$$\text{da cui} \quad [t^k z^n] \rho^m = \frac{m}{n} [\lambda^{n-1} t^k] (1 + \lambda)^n (1 + \lambda t)^n.$$

Si può ora utilizzare la formula del binomio di Newton per sviluppare le potenze. Si ottiene così un sistema di due equazioni (una per imporre il coefficiente di t uguale a k ed una per imporre il coefficiente di z uguale ad n) e si giunge a questa conclusione:

$$[t^k z^n] \rho^m = \begin{cases} \frac{m}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k+m} & \text{se } n \geq 1, m \geq 1 \\ 1 & \text{se } m = n = k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.9)$$

Si possono similmente ricavare anche le seguenti formule:

$$[t^k z^n](1 + \rho)^m = \begin{cases} \frac{m}{n} \binom{n}{k} \binom{n+m-1}{k+m} & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = k = 0 \\ 0 & \text{se } n = 0, k \geq 1 \end{cases} \quad (5.10)$$

$$[t^k z^n](1 + t\rho)^m = \begin{cases} \frac{m}{n} \binom{n}{k} \binom{n+m-1}{k-1} & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = k = 0 \\ 0 & \text{se } n = 0, k \geq 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Da (5.9), con $m = 1$, si scrive una formula per i numeri di Narayana:

$$\nu_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}.$$

Numero di doppie salite

Si osservi che, percorrendo un cammino di Dyck di semilunghezza n , ogni volta che si compie una salita u , il passo successivo può essere u , e in questo caso uu va a formare una doppia salita, oppure d , e in tale caso ud va a formare un picco. Dunque il numero di doppie salite sommato al numero di picchi dà come risultato n .

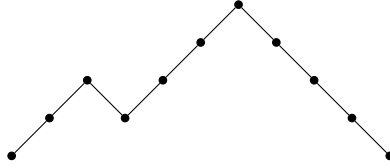


Figura 5.1: Un 5-cammino con 3 doppie salite e 2 picchi

Di conseguenza, usando (5.4) e (5.7):

$$\Omega_{\text{num.doppie salite}}(t, z) = \Omega_{\text{num.picchi}}\left(\frac{1}{t}, tz\right) = 1 + \rho(t, z).$$

Numero di valli

Si osservi che per ogni cammino di Dyck il numero di valli è uno in meno rispetto al numero di picchi, dunque:

$$\Omega_{\text{num.valli}}(t, z) = 1 + \rho(t, z) = \Omega_{\text{num.doppie salite}}(t, z). \quad (5.12)$$

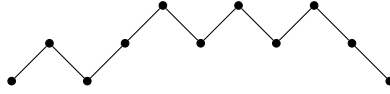


Figura 5.2: Un cammino con 3 valli e 4 picchi

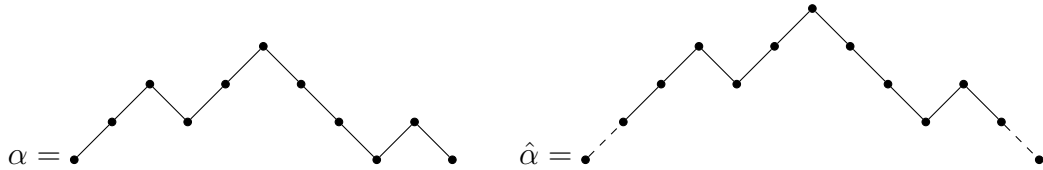
5.2 Numero di picchi bassi e picchi alti

Un *picco basso* si trova al livello 1, mentre un *picco alto* si trova ad un livello superiore al livello 1. Sono entrambi parametri additivi.

I primi verranno rappresentati dal parametro t e i secondi da s (ogni volta che si avrà a che fare con due parametri nello stesso momento, si userà sempre questa notazione).

Elevando, i picchi bassi divengono alti, quelli alti restano tali e nel caso di ϵ comparirà soltanto un picco basso.

Ad esempio, nel caso seguente α possiede 1 picco basso e 2 alti, mentre in $\hat{\alpha}$ ci sono 3 picchi alti e nessuno basso:



Dunque:

$$\hat{P}_n(t, s) = \begin{cases} t & \text{se } n = 0 \\ P_n(s, s) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t, s, z) = \Omega(s, s, z) + t - 1.$$

Da qui, utilizzando (4.2):

$$\Omega(t, s, z) - 1 = z\Omega(t, s, z)(\Omega(s, s, z) + t - 1).$$

$\Omega(s, s, z)$ ha i rappresentanti uguali per bassi ed alti picchi, dunque è la funzione generatrice del numero totale di picchi, cioè:

$$\Omega(s, s, z) = \Omega_{\text{num.picchi}}(s, z) = 1 + s\rho(s, z).$$

Sostituendo, risulta che:

$$\Omega_{\text{num.picchi bassi,alti}}(t, s, z) = \frac{1}{1 - z(t + s\rho(s, z))}. \quad (5.13)$$

Dopo alcune manipolazioni, si può fare uso della formula del binomio di Newton e ci si può ricondurre al caso (5.9) per scrivere la seguente formula, così da poter determinare il numero di n -cammini con i picchi bassi e j picchi alti:

$$[t^i s^j z^n] \Omega = \begin{cases} \sum_{h=i+1}^{\min(i+j, n-j)} \frac{h-i}{n-h} \binom{h}{i} \binom{n-h}{j} \binom{n-h}{i+j-h} & \text{se } i+j < n, j > 0 \\ 1 & \text{se } i=n, j=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5.2.1 Numero di picchi bassi

Per trovarne la funzione generatrice, è sufficiente ‘eliminare’ il segnaposto relativo ai picchi alti nella formula (5.13), ponendo dunque $s = 1$, ed utilizzando (5.8):

$$\Omega_{\text{num.picchi bassi}}(t, z) = \frac{1}{1 - (t + C - 1)z}. \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_{t=1} = C - 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = C_n, \quad n \geq 1.$$

Per trovare il numero di n -cammini con k picchi bassi:

$$[t^k z^n] \Omega = \sum_{h=0}^{\frac{n-k}{2}} \frac{h}{n-k-h} \binom{k+h}{h} \binom{2n-2k-2h}{n-k}.$$

Usando invece su (5.14) la definizione (2.7):

$$[t^k] \Omega = \frac{z^k}{(1 - z^2 C^2)^{k+1}}. \quad (5.15)$$

Per fare un'ultima osservazione sulla funzione generatrice dei picchi bassi, si affronta l'argomento della funzione di Fine.

La funzione e i numeri di Fine

L' n -esimo numero di Fine F_n è, per definizione, il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n senza picchi bassi; si veda a esempio [1]. Dunque, se Ω è la funzione generatrice del numero di picchi bassi:

$$F_n = [t^0 z^n] \Omega. \quad (5.16)$$

La funzione generatrice per la successione dei numeri di Fine è la seguente serie formale:

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n,$$

ed è chiamata *funzione di Fine*. Dunque, $F_n = [z^n] F$. Di conseguenza, da (5.16):

$$F(z) = [t^0] \Omega. \quad (5.17)$$

Direttamente da (5.15) e (5.17), si evince che:

$$F = \frac{C}{1 + zC} \quad \text{oppure} \quad F = \frac{1}{1 - z^2 C^2}, \quad (5.18)$$

e la seconda di queste formule si ottiene anche grazie a (2.7).

$F = F(z)$ si può scrivere anche nel seguente modo, utilizzando (2.8):

$$F(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{z(3 - \sqrt{1 - 4z})}. \quad (5.19)$$

Da (5.18) si avrà inoltre:

$$F = \sum_{i \geq 0} (-1)^i z^i C^{i+1} \quad \text{e} \quad F = \sum_{i \geq 0} z^{2i} C^{2i}. \quad (5.20)$$

Dall'ultimo dei due risultati si evince che F_n dovrà essere il coefficiente di z^{n-2i} in C^{2i} . Facendo uso di (2.9), si può ottenere:

$$F_n = \sum_{i \geq 0} \frac{i}{n-i} \binom{2n-2i}{n}.$$

Allo stesso modo, operando sul primo risultato di (5.20), si otterrà:

$$F_n = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (i+1) \binom{2n-i}{n}.$$

Successivamente, da (5.18) si ricava:

$$2F + zF = 1 + C,$$

da cui, per l'identità delle corrispondenti serie formali, si ottiene la relazione di ricorrenza:

$$2F_n + F_{n-1} = C_n.$$

Facendo infine una somma telescopica, si giunge alla seguente formula che lega i numeri di Catalan e di Fine:

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \frac{1}{2^i} C_{n-i}.$$

5.2.2 Numero di picchi alti

Operando in maniera analoga a prima, questa volta si pone $t = 1$ in (5.13), si rinomina $s = t$ e si usa infine la definizione (5.5):

$$\Omega_{\text{num.picchi alti}}(t, z) = 1 + \rho(t, z) = \Omega_{\text{num.doppie salite}}.$$

5.3 Numero di picchi e numero di passi di ritorno

Entrambi sono parametri additivi. Elevando, il numero di picchi resta invariato e risulta esserci un unico passo di ritorno, cioè quello di fine cammino:

$$\hat{P}_n(t, s) = \begin{cases} ts & \text{se } n = 0 \\ sP_n(t, 1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t, s, z) = ts - s + s\Omega(t, 1, z).$$

Unendo questo e (4.2), si avrà:

$$\Omega(t, s, z) - 1 = sz\Omega(t, s, z)(t - 1 + \Omega(t, 1, z)).$$

Essendo $\Omega(t, 1, z)$ la funzione generatrice del numero di picchi, varrà, per (5.4):

$$\Omega(t, 1, z) = 1 + t\rho(t, z).$$

Sostituendola:

$$\Omega(t, s, z) = \frac{1}{1 - tsz(1 + \rho(t, z))}. \quad (5.21)$$

Inoltre, come nei casi già affrontati, e per le stesse motivazioni, si può determinare il numero di n -cammini con i picchi e j passi di ritorno:

$$[t^i s^j z^n] \Omega = \begin{cases} \frac{j}{i} \binom{n-1}{i-1} \binom{n-1-j}{i-j} & \text{se } i > 0, j < n \\ 1 & \text{se } i = j = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5.3.1 Numero di passi di ritorno

Si ponga $t = 1$ in (5.21) e si rinomini $s = t$:

$$\Omega(t, z) = \frac{1}{1 - tzC}. \quad (5.22)$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_{t=1} = zC^3.$$

$$\sigma_n = \frac{3}{2n+1} \binom{2n+1}{n-1}, \quad \frac{\sigma_n}{C_n} = \frac{3n}{n+2}.$$

Il numero di n -cammini con k passi di ritorno sarà:

$$[t^k z^n] \Omega = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n}. \quad (5.23)$$

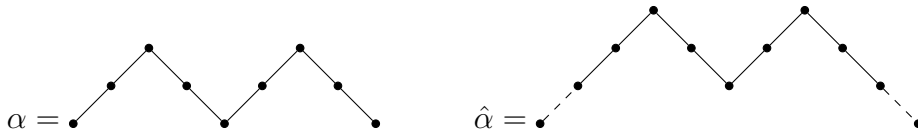
5.4 Numero di picchi e altezza del primo picco

Il primo è un parametro additivo, dunque si usa (4.2), il secondo è un parametro sinistro, dunque si usa (4.4):

$$\Omega(t, s, z) - 1 = z\Omega(t, 1, z)\hat{\Omega}(t, s, z).$$

Elevando, il numero di picchi non varia e l'altezza del primo picco aumenta di 1.

Ad esempio, nel caso seguente α possiede 2 picchi e il primo ha altezza 2, $\hat{\alpha}$ ne continua a possedere 2 ma il primo picco ha altezza 3:



Dunque:

$$\hat{P}_n(t, s) = \begin{cases} ts & \text{se } n = 0 \\ sP_n(t, s) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t, s, z) = ts - s + s\Omega(t, s, z),$$

$$\Omega(t, s, z) - 1 = sz\Omega(t, 1, z)[t - 1 + \Omega(t, s, z)].$$

Ma, essendo $\Omega(t, 1, z)$ la funzione generatrice dei picchi, $\Omega(t, 1, z) = 1 + t\rho(t, z)$, quindi:

$$\Omega(t, s, z) = 1 + \frac{ts\rho(t, z)}{1 + (1-s)\rho(t, z)}. \quad (5.24)$$

$$[s^j]\Omega = \frac{t\rho^j}{(1+\rho)^j} = tz^j(1+t\rho)^j.$$

Infine, usando (5.11), si può determinare il numero di n -cammini con i picchi e primo picco di altezza j :

$$[t^i s^j z^n]\Omega = \begin{cases} \frac{j}{n} \binom{n}{i-1} \binom{n-1-j}{i-2} & \text{se } i \geq n, j \geq n \\ 1 & \text{se } i = 1, j = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

5.4.1 Altezza del primo picco

Ponendo $t = 1$ in (5.24) e rinominando $s = t$:

$$\Omega_{\text{alt. primo picco}}(t, z) = \frac{1}{1 - tzC} = \Omega_{\text{num. passi ritorno}}(t, z). \quad (5.25)$$

5.5 Numero di valli basse e valli alte

Una *valle bassa* si trova al livello 0, mentre una *valle alta* si trova ad un livello superiore al livello 0.

La prima è un parametro quasi additivo: la concatenazione causa sempre la nascita di una ulteriore valle bassa.

La seconda è un parametro additivo.

Da (2.3) segue:

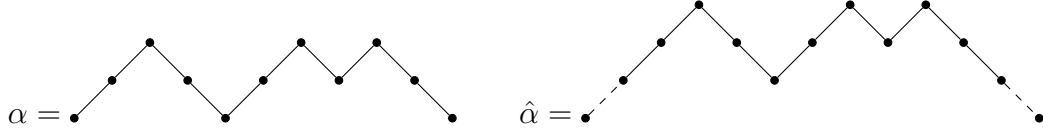
$$P_n = tP_{n-1}\hat{P}_0 + tP_{n-2}\hat{P}_1 + \dots + P_0\hat{P}_{n-1},$$

$$\Omega - 1 = tz\Omega\hat{\Omega} + (1-t)z\hat{\Omega}.$$

Elevando, tutte le valli continuano ad essere o diventano valli alte:

$$\hat{\Omega}(t, s, z) = \Omega(s, s, z).$$

Ad esempio, nel caso seguente α possiede 1 valle bassa ed 1 alta, mentre in $\hat{\alpha}$ ci sono 2 valli alte e nessuna bassa:



Di conseguenza:

$$\Omega(t, s, z) - 1 = tz\Omega(t, s, z)\Omega(s, s, z) + (1-t)z\Omega(s, s, z).$$

Ma, in quanto funzione generatrice del numero totale di valli, $\Omega(s, s, z) = 1 + \rho(s, z)$, dunque:

$$\Omega(t, s, z) = 1 + \frac{z(1 + \rho(s, z))}{1 - tz(1 + \rho(s, z))}. \quad (5.26)$$

Quindi il numero di n -cammini con i valli basse e j valli alte sarà pari a:

$$[t^i s^j z^n]\Omega = \frac{i+1}{n} \binom{n}{i+j+1} \binom{n-i-2}{j}, \quad i \neq n-1.$$

5.5.1 Numero di valli basse

Si pone $s = 1$ in (5.26):

$$\Omega_{\text{num.valli basse}}(t, z) = 1 + \frac{zC}{1 - tzC}.$$

Il numero di n -cammini con k valli basse sarà:

$$[t^k z^n]\Omega = \frac{k+1}{2n-k-1} \binom{2n-k-1}{n}.$$

Si nota che in un cammino di Dyck il numero di valli basse è uguale al numero di passi di ritorno meno 1. Dunque si sarebbero potute ricavare le formule sopra scritte da (5.22).

5.5.2 Numero di valli alte

Si pone $t = 1$ in (5.26) e si rinomina $s = t$:

$$\Omega_{\text{num.valli alte}}(t, z) = \frac{1}{1 - z(1 + \rho(t, z))}.$$

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{t=1} = \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z})^5}{32z^2\sqrt{1 - 4z}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = \binom{2n - 1}{n - 3}.$$

Usando (5.10) si determina il numero di n -cammini con k valli alte:

$$[t^k z^n] \Omega = \begin{cases} \sum_{h=1}^{n-k-1} \frac{h}{n-h} \binom{n-h}{k} \binom{n-1}{k+h} & \text{se } k \neq 0 \\ 2^{n-1} & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Si nota inoltre che numero di valli alte è uguale al numero di picchi meno il numero di passi di ritorno: dunque si sarebbe potuta ricavare la funzione generatrice da (5.21) ponendo $s = \frac{1}{t}$.

5.6 Numero di picchi prima e dopo il primo passo di ritorno

Naturalmente, concatenando due cammini di Dyck α e β , se si considera il cammino risultante $\alpha\beta$ e si vuole effettuare il conteggio del numero di picchi prima e dopo il primo passo di ritorno, per il cammino β si farà soltanto il conteggio dei picchi successivi al primo passo di ritorno, in quanto appunto, a seguito della concatenazione, prima di β ci sarà per forza almeno un passo di ritorno (nel punto di concatenazione c'è sicuramente). A causa di ciò e di (2.3):

$$P_{\hat{\mathbf{D}}_q \mathbf{D}_{n-1-q}}(t, s) = \hat{P}_q(t, s) P_{n-1-q}(s, s), \quad 0 \leq q \leq n - 1,$$

$$\Omega(t, s, z) - 1 = z \hat{\Omega}(t, s, z) \Omega(s, s, z).$$

Elevando, c'è solo il passo di ritorno finale: tutti i picchi sono precedenti al primo ed unico passo di ritorno:

$$\hat{P}_n(t, s) = \begin{cases} t & \text{se } n = 0 \\ P_n(t, t) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t, s, z) = t - 1 + \Omega(t, t, z),$$

$$\Omega(t, s, z) = 1 + z \Omega(s, s, z) (t - 1 + \Omega(t, t, z)).$$

Ma $\Omega(t, t, z)$ e $\Omega(s, s, z)$ sono funzioni generatrici dei picchi, cioè $\Omega(t, t, z) = 1 + t\rho(t, z)$ e $\Omega(s, s, z) = 1 + s\rho(s, z)$, dunque:

$$\Omega(t, s, z) = 1 + tz(1 + \rho(t, z))(1 + s\rho(s, z)).$$

Da qui, con $s = 1$ ottengo Ω_1 funzione generatrice del numero di picchi precedenti al primo passo di ritorno, e con $t = 1$ si trova Ω_2 funzione generatrice relativa al numero di picchi successivi al primo passo di ritorno:

$$\Omega_1(t, z) = 1 + tzC(z)(1 + \rho(t, z)),$$

$$\Omega_2(t, z) = 1 + zC(z)(1 + t\rho(t, z)).$$

5.7 Numero di discese di ritorno di lunghezza dispari e pari

Si utilizzano anche due parametri ausiliari: i, j . Il primo farà da esponente al suo ‘rappresentante’ x , e il secondo ad y . Il loro comportamento sarà:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{se l'ultima discesa ha lunghezza dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{se l'ultima discesa ha lunghezza pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

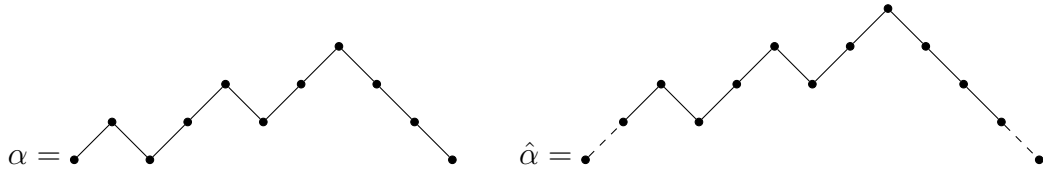
I parametri numero di discese di ritorno di lunghezza dispari e pari sono entrambi additivi, dunque:

$$P_{\mathbf{D}_q \hat{\mathbf{D}}_{n-1-q}}(t, s, x, y) = P_q(t, s, 1, 1) \hat{P}_{n-1-q}(t, s, x, y),$$

$$\Omega(t, s, x, y, z) - 1 = z\Omega(t, s, 1, 1, z)\hat{\Omega}(t, s, x, y, z).$$

Elevando, resta soltanto la discesa finale che muta la sua parità.

Ad esempio, nel caso seguente α possiede due discese di ritorno, entrambe di lunghezza dispari, mentre $\hat{\alpha}$ ne possiede soltanto una, di lunghezza pari:



Dunque:

$$\hat{P}_n(t, s, x, y) = \begin{cases} tx & \text{se } n = 0 \\ P_n(1, 1, sy, tx) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t, s, x, y, z) = tx - 1 + \Omega(1, 1, sy, tx, z),$$

$$\Omega(t, s, x, y, z) - 1 = z\Omega(t, s, 1, 1, z)(tx - 1 + \Omega(1, 1, sy, tx, z)).$$

Si definisce $\Gamma(t, s, z) = \Omega(t, s, 1, 1, z)$ per eliminare i parametri ausiliari e poi, a seguito di alcune manipolazioni, si ricava:

$$\Gamma(t, s, z) = \frac{1 - z^2 C^2}{1 - tz - sz^2 C - z^2 C^2}. \quad (5.27)$$

5.7.1 Numero di discese di ritorno di lunghezza dispari

Si pone $s = 1$ in (5.27) per trovare Ω :

$$\Omega(t, z) = \frac{1 + zC}{1 + z - tzC},$$

da cui si ricava:

$$[t^k]\Omega = \frac{(1 + zC)z^k C^k}{(1 + z)^{k+1}}.$$

Poi si può derivare ed utilizzare (5.18):

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{t=1} = \frac{F - 1}{z} \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = F_{n+1}.$$

5.7.2 Numero di discese di ritorno di lunghezza pari

Si pone $t = 1$ in (5.27) e si calcola Ω :

$$\Omega(t, z) = \frac{1 + zC}{1 - tz^2 C^2},$$

$$[t^k]\Omega = (1 + zC)z^{2k} C^{2k}.$$

Poi si deriva e si usa (5.18):

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{t=1} = \frac{F - 1}{z} - F + 1 - zF,$$

$$\text{da cui } \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ F_{n+1} - F_n - F_{n-1} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

5.8 Numero di duu e ddu

Si utilizza anche il parametro ausiliario i , che fa da esponente al suo ‘rappresentante’ x . Il suo comportamento è:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{se il cammino inizia con } uu \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I parametri numero di duu e numero di ddu sono entrambi quasi additivi. Concatenando, per $j \neq n-1$ si aggiunge sempre una coppia du , che può diventare duu nel caso in cui il secondo cammino inizi per uu . L’aggiunta di ddu è invece sempre verificata in quanto il primo cammino finisce ovviamente per dd visto che è stata compiuta una elevazione.

$$P_{\mathbf{D}_j \mathbf{D}_{n-1-j}}(t, s, x) = \begin{cases} P_{n-1}(t, s, t) & \text{se } j = 0 \\ s\hat{P}_j(t, s, x)P_{n-1-j}(t, s, t) & \text{se } 1 \leq j \leq n-2 \\ \hat{P}_{n-1}(t, s, x) & \text{se } j = n-1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} s\hat{P}_0 P_0(t, s, t) + (1-s)\hat{P}_0 & \text{se } n = 1 \\ (1-s)P_{n-1}(t, s, t) + s \sum_{j=0}^{n-1} \hat{P}_j P_{n-1-j}(t, s, t) + (1-s)\hat{P}_{n-1} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Omega - 1 = (1-s)(\Omega(t, s, t, z) - 1) + (1-s)z\hat{\Omega} + sz\hat{\Omega}\Omega(t, s, t, z). \quad (5.28)$$

Elevando, non si aggiungono né nuovi duu , né nuovi ddu :

$$\hat{P}_n(t, s, x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ xP_n(t, s, 1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\Omega}(t, s, x, z) = 1 - x + x\Omega(t, s, 1, z).$$

Da qui e (5.28):

$$\Omega - 1 = (1-s)z(\Omega(t, s, t, z) - 1) + z(1-s+s\Omega(t, s, t, z))(1-x+x\Omega(t, s, 1, z)).$$

Si può definire $\Gamma(t, s, z) = \Omega(t, s, 1, z)$ per eliminare il parametro ausiliario. Dopo qualche passaggio, si giunge all’equazione:

$$tsz\Gamma^2 - (1-2z+z^2-tz^2-sz^2+2tsz+tsz^2)\Gamma + 1-z+z^2+tsz-tz^2-sz^2+tsz^2 = 0,$$

che è simmetrica in t ed s .

Ponendo $\Phi(t, z) = \Gamma(t, t, z)$, si ottiene la funzione generatrice del numero di

duu e ddu .

A partire dall'ultima equazione scritta, usando la definizione (5.5) si ottiene:

$$\Phi(t, z) = 1 + z(1 + \rho(t, z))^2.$$

Tramite (5.10):

$$\begin{aligned} [t^k z^n] \Phi &= \frac{2}{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n}{k+2}. \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=1} &= \frac{(1 - \sqrt{1-4z})^4}{8z\sqrt{1-4z}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = 2 \binom{2n-2}{n-3}. \end{aligned}$$

5.8.1 Numero di duu

Dal caso precedente, con $s = 1$ si ottiene:

$$tz\Omega^2 - (1 - 2z + 2tz)\Omega + 1 - z + tz = 0.$$

$$[t^k z^n] \Omega = 2^{n-2k-1} C_k \binom{n-1}{2k}.$$

Visto il comportamento simmetrico dei due parametri, σ_n sarà la metà di quello del caso precedente:

$$\sigma_n = \binom{2n-2}{n-3}.$$

Capitolo 6

Equidistribuzione

Due parametri p_1, p_2 si dicono *equidistribuiti* se per tutti gli interi positivi n, k vale:

$$|\{\pi \in \mathbf{D}_n : p_1(\pi) = k\}| = |\{\pi \in \mathbf{D}_n : p_2(\pi) = k\}|.$$

Per esempio, il numero di valli e il numero di doppie salite sono parametri equidistribuiti. Infatti, da (5.12) si nota che possiedono la medesima funzione di distribuzione $\Omega(t, z) = 1 + \rho(t, z)$; utilizzando la formula (5.10) con $m = 1$, si ricava il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n con k valli o con k doppie salite:

$$\frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}.$$

Anche l'altezza del primo picco e il numero di passi di ritorno sono parametri equidistribuiti. Infatti, da (5.25) si nota che possiedono la medesima funzione di distribuzione $\Omega(t, z) = \frac{1}{1 - tzC(z)}$; da (5.23) si ha che il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n con k passi di ritorno o k uguale all'altezza del primo picco è:

$$\frac{k}{2n - k} \binom{2n - k}{n}.$$

Si vuole ora trovare una dimostrazione combinatoria di queste due equidistribuzioni.

Si definisce la seguente mappa:

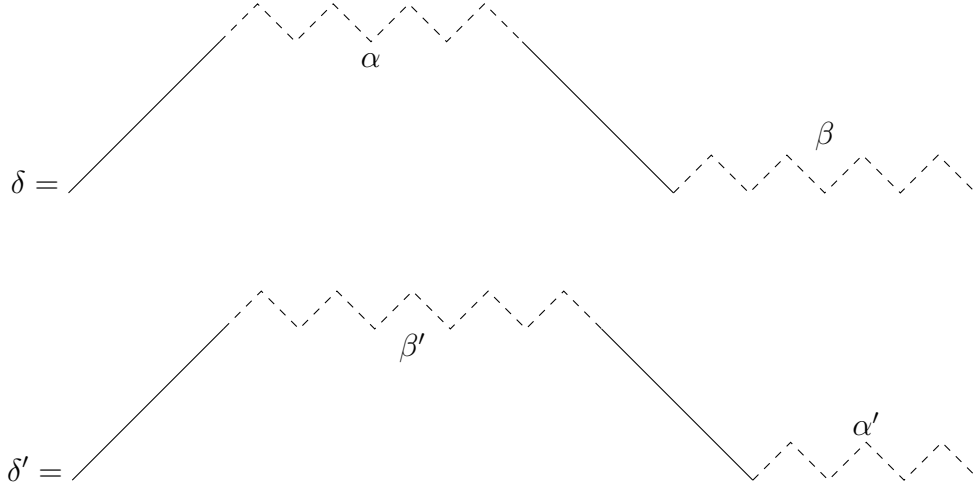
$$(\)' : \mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{D}_n$$

in maniera induttiva. Si pone $\epsilon' = \epsilon$.

Prendendo poi un cammino $\delta \neq \epsilon$, lo si può scomporre con la decomposizione unica del primo ritorno, $\delta = u\alpha d\beta$; si definisce poi:

$$\delta' = u\beta' d\alpha'.$$

Se ne può vedere una rappresentazione in figura:



Analisi dei primi casi:

$$(ud)' = (u\epsilon d\epsilon)' = u\epsilon' d\epsilon' = u\epsilon d\epsilon = ud, \quad (uudd)' = udud, \quad (udud)' = uudd.$$

e così via, ogni volta sfruttando la conoscenza dei casi precedenti.

La mappa $(\)'$ è un'involuzione perchè:

$$\epsilon'' = \epsilon, \quad (u\alpha d\beta)'' = (u\beta' d\alpha')' = u\alpha'' d\alpha'' = u\alpha d\beta.$$

Si indichino ora per semplicità: d =numero di doppie salite, v =numero di valli, h =altezza del primo picco, r =numero di passi di ritorno.

Si può dimostrare che, per $\delta \in \mathbf{D}_n$:

$$d(\delta) = v(\delta'), \quad h(\delta) = r(\delta').$$

Per induzione: per $n = 0$ vale; si assume che valga per cammini di semilunghezza $\leq n$. Ora è da provare per n .

Se $\delta \in \mathbf{D}_n$, $n \geq 1$, $\delta = u\alpha d\beta$, $\delta' = u\beta' d\alpha'$, allora:

$$d(\delta) = \begin{cases} d(\beta) & \text{se } \alpha = \epsilon \\ 1 + d(\alpha) + d(\beta) & \text{se } \alpha \neq \epsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v(\delta') &= \begin{cases} v(\beta') & \text{se } \alpha = \epsilon \\ v(\beta') + 1 + v(\alpha') & \text{se } \alpha \neq \epsilon \end{cases} \\
h(\delta) &= 1 + h(\alpha) \\
r(\delta') &= 1 + r(\alpha')
\end{aligned}$$

Da qui si arriva direttamente alla tesi, perchè si possono usare le ipotesi di induzione su α , β , α' , β' , in quanto sono di semilunghezza sicuramente inferiore ad n .

Per l'involuzione $(\quad)'$, $u\alpha d\beta$ è punto fisso soltanto se $\beta = \alpha'$, perchè:
 $(u\alpha d\alpha')' = u\alpha'' d\alpha' = u\alpha d\alpha'$.

Dunque, se n dispari esistono $C_{\frac{n-1}{2}}$ punti fissi, mentre per n pari nessuno.

Bibliografia

- [1] Deutsch, Emeric; Shapiro, Louis. A survey of the Fine numbers. *Discrete Math.* 241 (2001), no. 1-3, 241-265.
- [2] Deutsch, Emeric. Dyck path enumeration. *Discrete Math.* 204 (1999), no. 1-3, 167-202.
- [3] Deutsch, Emeric. An involution on Dyck paths and its consequences. *Discrete Math.* 204 (1999), no. 1-3, 163-166.
- [4] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55 (1972).
- [5] Callan, David. Some Identities for the Catalan and Fine Numbers. *arXiv:math/0502532v1* (2005).